Corrigé ESCP 2001 - Mathématiques I

31 août 2002

Partie I

1. Si $x \in E,\ x \in \ker P(f) \iff [P(f)](x) = 0$. Or $P(f)(f(x)) = [P(f) \circ f](x) = [f \circ P(f)](x)$ car f et $P(f)$ commutent.
   Ainsi lorsque $\boxed{x \in \ker P(f),\ P(f)(f(x)) = f(P(f)(x)) = 0_E}$ ie $\boxed{f(x) \in \ker P(f).}$
2. (a) Si $F = \mathbb{R}x,\ x \neq 0_E$, alors F est stable ssi $f(x) \in F$ ie ssi $\exists \lambda / f(x) = \lambda x$.
   D'où $\boxed{\mathbb{R}x,\ x \neq 0_E \text{ est stable par } f \text{ ssi } x \text{ vecteur propre de } f.}$
   (b) On a immédiatement $Sp(g) = \{1, 2\}$. Déterminons les sev propres associés :
   - $u = (x, y, z) \in E_1(g) \iff g(u) = u \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Le système équivaut à $y = z = 0$, d'où $\boxed{E_1(g) = \mathbb{R}e_1\ .}$
   - On voit de même que $\boxed{E_2(g) = \mathbb{R}e_3\ .}$
   Ainsi $\boxed{\text{les droites stables par } g \text{ sont } \mathbb{R}.e_1 \text{ et } \mathbb{R}e_3\ .}$
3. (a) On sait que $f\left(\sum_{k=1}^{n} F_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f(F_k)$ et de plus $\forall k \in [\![1, p]\!]\ ,\ f(F_k) \subset F_k$. Ceci implique que $\boxed{f\left(\sum_{k=1}^{p} F_k\right) \subset \sum_{k=1}^{p} F_k}$ cqfd.
   (b) $(f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{n_k}$ est un polynôme en f. D'après la question 1, $\boxed{\ker\left((f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{n_k}\right) \text{ est stable par } f.}$
   La somme proposée est donc stable par f suivant le b).

   (a) Soit F un sev stable par f. Alors $\boxed{\forall x \in F,\ (f - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) = \underbrace{f(x)}_{\in F} - \underbrace{\lambda x}_{\in F}}$, d'où F est stable par $f - \lambda \mathrm{Id}_E$. Réciproque évidente en remarquant que $f = g - (-\lambda)\mathrm{Id}_E$ où $g = f - \lambda \mathrm{Id}_E$.
   (b) Les sev stables par f le sont aussi par f^2 (immédiat).
   (c) Plus compliqué : soit F stable par F. f induit sur F un endomorphisme injectif, donc un automorphisme et ainsi $\boxed{f(F) = F \Rightarrow f^{-1}(F) = F}$. Il y a donc identité entre les sev stables par f et par f^{-1}.
   (d) Si f laisse stable tout sev de E, tout vecteur non nul de E est, d'après la question 2.a), un vecteur propre de f. Soit $x \neq 0_E,\ \lambda \in \mathbb{R} /\ f(x) = \lambda x$, montrons que $f = \lambda \mathrm{Id}$. En effet, si y est colinéaire à x on a immédiatement $f(y) = \lambda y$. Sinon, on a $f(y) = \mu y$ et $(x + y, f(x + y))$ liée. Or $f(x + y) = \lambda x + \mu y$, d'où dans $\mathrm{Vect}(x, y)$ dont (x, y) est une base le couple $(x + y, f(x + y))$ à pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$. Elle n'est pas inversible, d'où $\mu - \lambda = 0$

ie $\mu = \lambda$.
On a donc $\boxed{\forall x \in E, f(x) = \lambda x \iff f = \lambda \mathrm{Id}.}$

(e) On peut considérer une « rotation » : $f(e_1) = e_2,\ f(e_2) = -e_1$ définie sur la base canonique de $\mathbb{R}^2$.Si on note A sa matrice canoniquement associée, $A - \lambda \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ est non inversible ssi $\lambda^2 + 1 = 0$. $\boxed{\text{Il n'y a donc pas de valeur propre réelle.}}$ Un tel endomorphisme ne possède pas de droite stable.

(a) Si f est une forme linéaire sur E non nulle son image est $\mathbb{R}$, d'où son noyau est de dimension $n-1$ d'après le théorème du rang.
Réciproquement, soit H un hyperplan de E et $e \notin H$. On a $E = H \oplus \mathbb{R}e$ d'où $\boxed{\forall x \in E,\ \exists!(y,a) \in H \times \mathbb{R} / \ x = y + ae}$. L'application φ qui à x associe a est une forme linéaire sur E de noyau H.L'équivalence est ainsi établie.

(b) i. Si H est stable par f, posons $\psi = \varphi \circ f$. ψ est une forme linéaire dont le noyau contient H car $f(H) \subset H$. Soit alors $e_1 \notin H,\ e_2 = f(e_1)$ et posons $a = \psi(e_1),\ b = \varphi(e_1)$.
On sait que $b \neq 0$ d'où $\psi(e_1) = \frac{a}{b}\varphi(e_1) \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R},\ \psi(ce_1) = \frac{a}{b}\varphi(ce_1)$.
Si $x \in H, \psi(x) = \frac{a}{b}\varphi(x)$ car $\psi(x) = \varphi(x) = 0$. En utilisant de plus la supplémentarité de H et $\mathbb{R}e_1$, on en déduit que $\boxed{\psi = \frac{a}{b}\varphi.}$
Réciproquement, si $\varphi \circ f = \lambda\varphi$ alors $\forall x \in H,\ \varphi(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) \in H$ ie H est stable par f.
On a donc bien établi l'équivalence.

ii. D'après les propriétés des matrices d'applications linéaires $\boxed{\varphi \circ f = \lambda\varphi \iff LA = \lambda L.}$
Il suffit de transposer cette égalité pour obtenir la condition $\boxed{{}^tA{}^tL = \lambda{}^tL.}$

(c) La dernière égalité se traduit par « ${}^tL$ est un vecteur propre de ${}^tA$ ». Pour l'exemple proposé $A = B$, d'où ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Il y a donc $\boxed{\text{2 sev propres : } \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour } \lambda = 1 \text{ et } \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ pour } \lambda = 2.}$
Les matrices L qui conviennent sont de la forme : $L = (0, \beta, 0),\ \beta \in \mathbb{R}^*$ et $L = (0,0,\gamma),\ \gamma \in \mathbb{R}^*$. Ainsi si $u = (x,y,z)_{\mathcal{B}}$ alors les φ qui conviennent sont définies par $\varphi(u) = \beta y$ et $\varphi(u) = \gamma z$. Les plans stables sont donc $\boxed{P_1 \text{ d'équation } y = 0 \text{ et } P_2, \text{ d'équation } z = 0 \text{ dans } \mathcal{B}}$

Partie II

1. Si $p = 1$, $f = \lambda_1 \mathrm{Id}_E$, tous les sev sont stables
2. (a) La somme des sev propres est directe et égale à E se traduit par l'existence est l'unicité de $(x_1, ..., x_p)$.

(b) On constate immédiatement que $\boxed{\sum_{k=2}^{p} (\lambda_k - \lambda_1)x_k = \underbrace{f(x)}_{\in F} - \underbrace{\lambda_1 x}_{\in F}.}$

(c) On raisonne par récurrence sur p . Si $p = 1$, la propriété à déjà été vue. On la suppose vraie au rang $p - 1 \geq 1$. Soit f un endomorphisme diagonalisable possédant p valeurs propres et F un sev stable par f. En utilisant les notations de la question précédente, $\boxed{\left(\sum_{k=2}^{p} (\lambda_k - \lambda_1)x_k\right) \in F \cap \sum_{k=2}^{p} E_k}$. Or ce dernier sev est stable par l'endomorphisme induit par f sur $\sum_{k=2}^{p} E_k$ qui lui possède $p-1$ valeurs propres. D'où $\boxed{\forall k \in [\![2,p]\!],\ (\lambda_k - \lambda_1)x_k \in F \Rightarrow x_k \in F}$

. On en déduit alors que $\boxed{x_1 = x - \sum_{k=2}^{p} x_k \text{ appartient à } F}$. La récurrence est établie.

3. Si F est de cette forme alors il est stable par f. Réciproquement, si F est stable par f, on pose $F_k = E_k \cap F$. Alors $\sum_{k=1}^{p} F_k \subset F$ et d'après la question 2, $F \subset \sum_{k=1}^{p} F_k$, d'où l'égalité.

4. Les F_k sont en somme directe et $\boxed{F = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k}$. De plus les F_k non réduit au vecteur nul sont des sev propres de $g = f\,|_F$. Ainsi $\boxed{F \text{ est la somme de sev propres de } g,\ g \text{ est donc diagonalisable}}$.

5. Pour que ce nombre soit fini il ne faut pas de plan stable car un plan stable comporte une infinité de droites stables. D'où les sev propres sont de dimension 1, il y a nécessairement n valeurs propres. Réciproquement si f possède n valeurs propres, pour constituer un sev stable on doit choisir k sev propres, $k \in [\![0, n]\!]$ et en faire la somme. Il y a donc $\boxed{2^n \text{ choix possibles et autant de sev stables.}}$

   Ainsi $\boxed{\text{la CNS est : } f \text{ possède } n \text{ valeurs propres.}}$

Partie III

1. (a) Si $P = X^{n-1}$ alors $D^{n-1}(X^{n-1}) = (n-1)!$ et $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ D^{n-1}(P)$ est un polynôme constant d'où $D^n(P) = 0$. On a donc bien $\boxed{D^{n-1} \neq 0 \text{ et } D^n = 0.}$

   (b) Il est clair que ces sev sont stables. Réciproquement si F est un sev stable et P de degré maximal $p \geq 1$ dans F, alors on a $\boxed{F = \mathrm{Vect}(P, D(P), ..., D^p(P)) = \mathbb{R}_p[X]}$. D'où $\boxed{F = \mathbb{R}_p[X].}$ (le cas $p = 0$ est trivial)

2. (a) Déjà vu en exos ! Soit $x \notin \ker(f^{n-1})$, posons $e_1 = x,\ e_2 = f(x), ..., e_n = f^{n-1}(x)$. On remarque que $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ e_k \in \mathrm{Vect}(e_{k+1}, ..., e_n)$ car $\mathrm{Vect}(e_{k+1}, ..., e_n) \subset \ker(f^{n-k-1})$. La famille $(e_1, ..., e_n)$ est donc libre et c'est alors une base de E. On obtient la matrice de f dans cette base très facilement.

   (b) B est la matrice de D dans la base $(1, X, ..., X^{n-1})$. Or D vérifiant les hypothèses de la question 2.a), il existe une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans laquelle sa matrice est A. D'où $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables.}}$

   (c) Montrons que les sev stables sont les $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k), \forall k \in [\![1, n]\!]$.
   En effet si F est stable et si k est le plus grand des indices qui apparaissent dans les décompositions des vecteurs de F suivant les e_i, alors $F \subset \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k)$. Soit $x \in F$ ayant une composante non nulle sur e_k. On a ainsi :

   - $f^{k-1}(x) \in \mathbb{R}e_1 \cap F$ et est $\neq 0_E$, d'où $\boxed{e_1 \in F}$;
   - $f^{k-2}(x) \in (\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2) \cap F$ avec une composante non nulle sur e_2, d'où $\boxed{e_2 \in F}$;
   - On montre ainsi que les $e_i, i \in [\![1, k]\!]$ appartiennent tous à F.
     On en déduit que $\boxed{F \subset \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k)}$ et d'après ce qui précède on a l'égalité.

   $\boxed{\text{Les sev stables par } f \text{ sont donc les } \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k) \text{ pour } k \in [\![1, n]\!] \text{ et le singleton } \{0_E\}}$

Partie IV

1. (a) $f^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$ et en particulier $f(F_2) \subset \ker(f)$.

   (b) $F_1 \subset \ker(f)$ et $F_2 \cap \ker(f) = \{0_E\} \Rightarrow$ la somme $F_1 + F_2$ est directe.
   De plus $f(F_1+F_2) = \underbrace{f(F_1)}_{=\{0_E\}} + \underbrace{f(F_2)}_{\subset F_1} \subset F_1 \subset F_1+F_2$. La $\boxed{\text{stabilité de } F_1 + F_2 \text{ est établie.}}$

   (c) $(A \cap B) \subset A$ et $(B \cap C) \subset B$ d'où $(A \cap C) + (B \cap C) \subset A + B$. Idem pour l'inclusion dans C car c'est un sev.
   On a pas nécessairement l'égalité : (lorsque $n \geq 2$) soit (e_1, e_2) une famille libre, on a, $\boxed{\mathbb{R}e_1 \cap \mathbb{R}(e_1+e_2) = \{0_E\}}$, $\boxed{\mathbb{R}e_2 \cap \mathbb{R}(e_1+e_2) = \{0_E\}}$ et $\boxed{(\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2) \cap \mathbb{R}(e_1+e_2) = \mathbb{R}(e_1+e_2)}$ cqfd.

   (d) Il est clair que $F_1 \subset (F_1 + F_2) \cap \ker(f)$.
   Réciproquement si $(x+y) \in \ker(f)$ avec $x \in F_1$ et $y \in F_2$ alors $y = (x+y) - x$, ces deux vecteurs appartenant à $\ker(f)$. D'où $y \in \ker(f) \Rightarrow y = 0_E$ car $F_2 \cap \ker(f) = \{0_E\}$. Ainsi $x + y = x \in F_1$ et $\boxed{(F_1+F_2) \cap \ker(f) = F_1.}$

2. On a $f(F) \subset f(E) \subset \ker(f)$. D'autre part si $x \in F \cap \ker(f)$ alors $x \in F_1 \Rightarrow x = 0_E$.

3. (a) On détermine ces sev : $(M - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   D'où
   $$\boxed{(M-I_4)^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0_{4,1} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right.}$$
   D'où $\boxed{\ker(f - \mathrm{Id})^2 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2).}$ On montre de même que $\boxed{\ker(f - 2\mathrm{Id})^2 = \mathrm{Vect}(e_3, e_4).}$
   Il est alors immédiat que ces sev sont supplémentaires.

   (b) Il est clair que ceci conviennent. Réciproquement, si F est stable par h, montrons que $F = (F \cap G_1) + (F \cap G_2)$.
   On peut écrire : $\forall x \in F,\ \exists!(x_1, x_2) \in G_1 \times G_2 /\ x = x_1 + x_2$. Montrons que $x_1 \in G_1$ et $x_2 \in G_2$.
   En effet, on a $\boxed{(h - \mathrm{Id})^2(x) = (h - Id)^2(x_2) = h^2(x_2) - 2h(x_2) + x_2}$. Or $(h - 2\mathrm{Id})^2(x_2) = h^2(x_2) - 4h(x_2) + 4x_2 = 0$ d'où $h^2(x_2) = 4h(x_2) - 4x_2$ (1) et ainsi $\boxed{(h - \mathrm{Id})^2(x) = 2h(x_2) - 3x_2}$.
   En composant par h et en utilisant (1), on obtient : $\boxed{(h \circ (h - \mathrm{Id})^2)(x) = 5h(x_2) - 8x_2}$. Il vient alors : $\boxed{x_2 = 5(h - \mathrm{Id})^2(x) - 2(h \circ (h - \mathrm{Id})^2)(x)}$, donc $\boxed{x_2 \in F}$. D'où $\boxed{x_1 = x - x_2}$ aussi, cqfd.

   (c) Classons les sev stables F en fonction du couple $(\dim H_1, \dim H_2)$:
   - $(0,0)$ $F = \{0_E\}$
   - $(1,0)$ H_1 est une droite stable donc $\boxed{F = H_1 = E_1(h) = \mathbb{R}e_1}$ $(0,1)$ idem, $\boxed{F = E_2(h) = \mathbb{R}e_3}$
   - $(1,1)$ Somme des 2 droites propres : $\boxed{F = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_3}$
   - $(2,0)$ $\boxed{F = G_1}$ et $(0,2)$ $\boxed{F = G_2}$
   - $(2,1)$ $\boxed{F = G_1 \oplus \mathbb{R}e_3}$; $(1,2)$ $\boxed{F = \mathbb{R}e_1 \oplus G_2}$
   - $(2,2)$ $F = E$.

Partie V

1. $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$, d'où la famille $(\mathrm{Id}, f, f^2, ..., f^{n^2})$ est liée. Cela se traduit par $\boxed{\exists (a_0, ..., a_{n^2}) \in \left(\mathbb{R}^{n^2+1}\right)^* \ / a_0\mathrm{Id} + a_1 f + ... + a_{n^2} f^{n^2} = 0_{\mathcal{L}(E)}}$. Posons alors $\boxed{P = \sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k}$, on a bien $\boxed{P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}}$.

2. (a) M étant à coefficients réels $\overline{z}$ est aussi racine de M.
   D'où $\boxed{(X - z)(X - \overline{z})) = X^2 - 2\Re(z)X + |z|^2 \text{ divise } M}$.

   (b) Si $f^2 + bf + c\mathrm{Id}_E$ est injectif, étant un endomorphisme en dimension fini, il est inversible. Or $\exists Q \in \mathbb{R}[X] \ / M = (X^2 + bX + c)Q(X) \Rightarrow M(f) = (f^2 + bf + c\mathrm{Id}_E) \circ Q(f)$. Mais $\boxed{M(f) = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } f^2 + bf + c\mathrm{Id}_E \text{ inversible impliquent } Q(f) = 0}$ ce qui contredit la minimalité du degré de M. On a bien $\boxed{f^2 + bf + c\mathrm{Id}_E \text{ non injectif .}}$

   (c) Soit $x \in \ker(f^2 + bf + c\mathrm{Id}_E)$ non nul et $P = \mathrm{Vect}(x, f(x))$. Montrons que P est un plan. En effet si $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$ alors $(f^2 + bf + c\mathrm{Id}_E)(x) = (a^2 + ba + c)x = 0_E$ d'où $a^2 + ba + c = 0$ ce qui est impossible car les racines de ce trinôme sont z et $\overline{z}$. Ainsi le couple $(x, f(x))$ est libre.
   De plus $\boxed{f(x) \in P \text{ et } f(f(x)) = -bf(x) - cx \in P}$. $\boxed{P \text{ est bien stable par } f}$.

3. (a) On choisit $x \notin \ker(g^{p-1})$. Alors si $a_0 x + a_1 g(x) + ... + a_{p-1} g^{p-1}(x) = 0$ il vient $-a_0 x = a_1 g(x) + ... + a_{p-1} g^{p-1}(x)$. Or $a_1 g(x) + ... + a_{p-1} g^{p-1}(x) \in \ker(g^{p-2})$ d'où $a_0 = 0$. On raisonne de même pour montrer que tous les a_i sont nuls.

   (b) $\boxed{\mathrm{Vect}(g^{p-2}(x), g^{p-1}(x)) \text{ est stable par } f \text{ car } f(g^{p-2}(x)) = \lambda g^{p-2}(x) + g^{p-1}(x) \text{ et } f(g^{p-1}(x)) = \lambda g^{p-1}(x)}$. De plus c'est un plan car $g^{p-2}(x) \notin \ker(g)$.

4.

- Si M possède une racine complexe non réelle on peut conclure comme dans la question 2.

- Si M ne possède qu'une racine dans $\mathbb{C}$, réelle, on conclut grâce à la question 3.
- Si M possède au moins deux racines réelles λ_1 et λ_2 alors il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\boxed{M(f) = (f - \lambda_1\mathrm{Id}) \circ (f - \lambda_2\mathrm{Id}) \circ Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}}$. D'où $\boxed{f - \lambda_1\mathrm{Id} \text{ et } f - \lambda_2\mathrm{Id} \text{ ne sont pas inversibles}}$ ce qui implique que $\boxed{\lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont des valeurs propres de } f}$. Soit x un vecteur propre associé à λ_1 et y de même pour λ_2. Alors $\boxed{\mathrm{Vect}(x, y) \text{ est un plan stable par } f}$.
  Dans tous les cas il existe un plan stable par f.